ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 80 (1992), 289–300

NOYAU DE LA CHALEUR ET DISCRETISATION D'UNE VARIETE RIEMANNIENNE

PAR

THIERRY COULHON*

Equipe d'Analyse, Université Paris VI, Tour 46, 4ème étage
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

ABSTRACT

One considers a bounded geometry non-compact Riemannian manifold, and the graph obtained by discretizing this manifold. One shows that the uniform decay for large time of the heat kernel on the manifold and the decay of the standard random walk on the graph are the same, in the polynomial scale. As a consequence, such a large time behaviour of the heat kernel is invariant under rough isometries.

Introduction

Soit M une variété riemannienne complète, non compacte, à géométrie bornée. On appelle discrétisé de M un ensemble X de points de M qui ne soient pas trop proches les uns des autres, mais tel que tout point de M soit assez proche d'au moins l'un d'eux. On peut toujours construire un tel ensemble, et le munir naturellement d'une structure de graphe, en reliant entre eux les points éloignés de moins d'une distance fixée.

Dans ces conditions, la géométrie de X est une bonne approximation de la géométrie globale de M. On peut s'attendre à ce que certaines propriétés globales de théorie du potentiel sur M se lisent directement sur X. Cette idée de discrétisation est présente chez de nombreux auteurs (Furstenberg, Guivarc'h, Lyons–Sullivan, et les références ci-dessous). Ainsi Varopoulos a montré dans [15] que M est transiente si et seulement si X est transient.

* *Current address: Université de Cergy-Pontoise, Pôle scientifique, 47–49 avenue des Genottes, BP 8428, 95806 Cergy Pontoise Cedex, France.*
Received June 13, 1991 and in revised form October 24, 1991

Il est raisonnable de penser que cet énoncé peut être quantifié, c'est-à-dire que le noyau de la chaleur p_t sur M est tel que $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-n/2}), t \to +\infty$, si et seulement si la chaîne de Markov standard de noyau q sur X est telle que $\sup_{x,y\in X} q_k(x,y) = O(k^{-n/2})$. De fait, Varopoulos a énoncé ce théorème dans [18], en le prouvant dans le cas particulier d'un revêtement co-compact, mais avec des arguments de triangulation qui semblent malaisés à étendre au cas général.

Dans [1], Ancona donne une preuve élégante de l'équivalence entre la transience de M et celle de X, basée sur la caractérisation de la transience en termes de formes de Dirichlet (à l'autre extrême, il montre aussi, en généralisant un résultat de Brooks ([2], voir aussi [11]), que M est coercive si et seulement si X est coercif); c'est cette preuve qui nous a fait penser qu'il était possible de donner, dans le même esprit, une preuve simple du théorème annoncé par Varopoulos, en utilisant la caractérisation donnée dans [6] de $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-n/2}), t \to +\infty$.

Après avoir rédigé cette preuve, nous nous sommes aperçu qu'elle permettait de répondre à une question posée par Chavel et Feldman dans [4]: montrer qu'une inégalité de Sobolev modifiée, au sens où elle ne tient pas compte des petits ensembles, suffit à gouverner le comportement du noyau de la chaleur pour t grand sur une variété. Pour cela, Chavel et Feldman indiquaient un itinéraire, où le seul pas manquant était précisément l'équivalence directe entre la décroissance du noyau de la chaleur sur la variété et sur son discrétisé.

Entre-temps, Chavel et Feldman avaient déjà répondu, dans [5], à leur propre question, mais par des méthodes sensiblement différentes de celles qu'ils avaient d'abord préconisées, en particulier sans transiter par un énoncé sur le discrétisé.

Nous appliquerons enfin cet énoncé à la comparaison des noyaux de la chaleur sur des variétés "roughly isometric" (ce que nous traduirons par "isométriques à l'infini") au sens de Kanai ([11], [12], [13]).

Je remercie Nicholas Varopoulos pour avoir ramené au bon moment mon attention sur ces questions, et pour d'intéressantes suggestions, ainsi que Michel Ledoux, Isaac Chavel et Brian Davies pour leurs remarques sur le manuscrit.

I. Dimension d'un graphe

Soit X un graphe dénombrable et connexe (on peut toujours relier deux points quelconques par au moins un chemin fini). Si x et y sont deux points de X, on note $d(x,y)$ le nombre de pas du plus court chemin joignant x à y. On note $x \sim y$ si $d(x,y) = 1$, c'est-à-dire si x et y sont voisins. Soit $n(x)$ le nombre de voisins de $x \in X$. Nous supposerons $\sup_{x\in X} n(x) < +\infty$.

Un noyau de transition sur X est une fonction $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que $\sum_{y\in X} p(x,y) = 1, \forall x \in X$. Nous dirons que p est admissible si $p(x,y)n(x) = p(y,x)n(y)$ et s'il existe $c > 0$ tel que $p(x,y) \geq c$, $\forall x,y \in X$ tels que $y \sim x$. Nous noterons p_k le $k^{\text{ième}}$ itéré de p, c'est-à-dire que $p_1 = p$ et $p_k = \sum_{z\in X} p_{k-1}(x,z)p(z,y)$. Le noyau standard q, défini par $q(x,y) = 1/n(x)$ si $y \sim x$, 0 sinon, est admissible.

Introduisons la norme de Dirichlet associée à X:

$$\|f\|_D^2 = \sum_{x\sim y} |f(x) - f(y)|^2 ,$$

où $f \in C_0(X)$, l'ensemble des fonctions sur X à support fini.

Dans [16], Varopoulos a démontré :

THÉORÈME 1: *Les deux conditions suivantes sont équivalentes pour $n > 2$:*

(i) $\|f\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C\,\|f\|_D, \forall f \in C_0(X)$.

(ii) *Pour tout noyau admissible p sur X,* $\sup_{x,y\in X} p_k(x,y) = O(k^{-n/2})$.

Remarque: La condition (i) est vérifiée si X satisfait une inégalité isopérimétrique de dimension n (cf. [16]). C'est pourquoi, si (i) ou (ii) est vérifiée, nous dirons que X est de dimension n (il est alors aussi de dimension m, pour $m \leq n$). ∎

Esquisse de preuve (tirée de [8], voir aussi [9]): Notons T l'opérateur associé à p: $Tf(x) = \sum_{y\in X} p(x,y)f(y), f \in C_0(X)$; T^k a pour noyau p_k.

La condition (i), compte tenu du fait que

$$\|f\|_D^2 \leq C \sum_{x,y} |f(x) - f(y)|^2\, p(x,y)n(x) = C\,((I-T)f, f)$$

(le produit scalaire est pris par rapport à la mesure de comptage sur X pondérée par $n(x)$) entraîne que

$$\|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq C \left\|(I-T)^{1/2} f\right\|_2^2 .$$

On en déduit que

$$\left\|T^k f\right\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq C k^{-1}\,\|f\|_2^2 , \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

et par un argument d'extrapolation ([8], prop. 1), que $\left\|T^k f\right\|_\infty \leq Ck^{-n/2}\|f\|_1$ (voir [8], thm. 6). Ceci équivaut à (ii).

Pour la réciproque, on montre comme dans [8], thm. 1, que, si T est associé à un noyau p admissible, et si $\left\|T^k f\right\|_\infty \leq Ck^{-n/2}\|f\|_1$, alors

$$(I-T)^{-1/2} - I : L^2 \to L^{\frac{2n}{n-2}};$$

en fait, comme l'espace est discret,

$$(I-T)^{-1/2} : L^2 \to L^{\frac{2n}{n-2}},$$

autrement dit

$$\|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq C\left\|(I-T)^{1/2}f\right\|_2^2 = C\sum_{x,y}|f(x)-f(y)|^2 p(x,y)n(x).$$

Le cas particulier du noyau standard redonne (i).

II. Dimension à l'infini d'une variété

L'énoncé qui suit est tiré de [6]. Nous en esquissons une preuve pour la commodité du lecteur.

THÉORÈME 2: *Soit (M,ξ) un espace mesuré σ-fini, et $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs analytique borné sur $L^2(M,\xi)$.*

Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes, pour $n>2$:

(i) $\|T_t\|_{1\to\infty} = O(t^{-n/2}), t\to+\infty$.

(ii) $A^{-1/2} : L^2 \longrightarrow L^2 + L^{\frac{2n}{n-2}}$, et $T_1 : L^1 \longrightarrow L^\infty$.

Preuve: (ii) $\Rightarrow$ (i). Comme T_1 envoie L^1 dans L^∞, donc, par interpolation, L^2 dans $L^{\frac{2n}{n-2}}$, on a

$$T_1 A^{-1/2} : L^2 \to L^{\frac{2n}{n-2}}.$$

Ecrivons $T_{t+1} = T_1 A^{-1/2} A^{1/2} T_t$.

On a

$$\|T_{t+1}\|_{2\to\frac{2n}{n-2}} \leq \left\|T_1 A^{-1/2}\right\|_{2\to\frac{2n}{n-2}} \left\|A^{1/2}T_t\right\|_{2\to 2} \leq Ct^{-1/2},$$

puisque T_t est analytique sur L^2.

L'argument d'extrapolation de [6], II permet d'en déduire (ii).

(i)$\Rightarrow$ (ii). L'hypothèse donne, par les méthodes de [17] (voir aussi [6]),

$$T_1 A^{-1/2} = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} T_{t+1}\, dt : L^2 \to L^{\frac{2n}{n-2}}.$$

Comme d'autre part $(I - T_1)A^{-1/2} = \int_0^1 A^{1/2} T_t\, dt : L^2 \to L^2$ par analyticité de T_t, on en déduit (ii).

Remarque: Si S est un opérateur régularisant, c'est-à-dire borné sur les $L^p, 1 \leq p \leq +\infty$ et de L^1 dans L^∞, (i) ou (ii) entraîne: $SA^{-1/2} : L^2 \to L^{\frac{2n}{n-2}}$. ∎

Soit maintenant M une variété riemannienne, Δ l'opérateur de Laplace–Beltrami associé, et $T_t = e^{t\Delta}$ le semi-groupe de la chaleur sur M, qui est analytique borné en L^2 puisque Δ est auto-adjoint négatif. Nous dirons que M a pour dimension à l'infini n, si $\|T_t\|_{1\to\infty} = O(t^{-n/2}), t \to +\infty$.

III. Discrétisation d'une variété

Soit M une variété riemannienne complète, et X un ensemble de points de M. Nous dirons que X est un discrétisé de M s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $d(x,y) \geq \epsilon$, $\forall x, y \in X, x \neq y$ et $d(x, X) \leq \epsilon, \forall x \in M$.

Il est toujours possible de construire un tel ensemble: il suffit de considérer une partie maximale de points de distance mutuelle supérieure à ϵ.

On munit X d'une structure de graphe en décidant que $x, y \in X$ sont voisins si $d(x,y) \leq 2\epsilon$.

Si M est connexe, tout discrétisé de M est un graphe connexe.

Nous supposerons dorénavant que M est à géométrie bornée, c'est-à-dire que sa courbure de Ricci est minorée, et son rayon d'injectivité strictement positif. Notons que cette hypothèse est la plus faible parmi les hypothèses habituelles de géométrie bornée. Kanai a montré, dans une série d'articles ([11],[12],[13]) comment un certain nombre d'invariants géométriques d'une telle variété se lisaient sur un discrétisé.

Nous n'utiliserons l'hypothèse de géométrie bornée qu'à travers trois faits.

FAIT 1: *Le volume d'une boule de M de rayon fixé est majoré et minoré uniformément par rapport à son centre. Autrement dit, $\forall r > 0, \exists C > 0$ tel que $C^{-1} \leq |B(x,r)| \leq C, \forall x \in M$.*

La majoration découle de théorèmes de comparaison classiques, et n'utilise que l'hypothèse sur la courbure, et la minoration est due à Croke ([10], prop. 14). Pour tout ceci, voir [11], p.394.

FAIT 2: *$\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que tout point de X ait au plus N voisins.*

Il s'agit en fait d'une conséquence facile du fait 1, et même seulement de la majoration du volume, donc de la minoration de la courbure de Ricci. Pour une preuve, voir [11], lemme 2.3.

FAIT 3: *Il existe une partition de l'unité $(\phi_x)_{x\in X}$, formée de fonctions C^∞ sur M telles que $\phi_x \equiv 1$ sur $B(x,\epsilon/2)$, supp $\phi_x \subset B(x,2\epsilon)$, et $\exists C > 0$ tel que $\|\nabla\phi_x\|_\infty \leq C, \forall x \in X$.*

Pour construire une telle partition de l'unité, on compose la fonction $d(x,.)$ avec une fonction convenable de $\mathbb{R}_+$ dans $[0,1]$, on régularise, et on normalise en divisant par la somme sur $x \in X$ des fonctions ainsi obtenues. Le gradient reste uniformément borné car un point de M rencontre, à cause du fait 2, au plus $N+1$ boules $B(x,\varepsilon), x \in X$. Pour les détails, voir [12], p. 235. Le fait 3 vaut lui aussi sur une variété à courbure de Ricci minorée, sans hypothèse sur le rayon d'injectivité.

Nous allons maintenant énoncer les lemmes techniques qui nous seront utiles dans la suite. La notation $\|.\|_p$ désignera, suivant le contexte, la norme l^p sur X par rapport à la mesure de comptage, ou la norme L^p sur M par rapport à la mesure riemannienne $d\xi$.

Si f est une fonction sur X, nous noterons $\hat{f} = \sum_{x\in X} f(x)\phi_x$.

LEMME 1: *$\exists C > 0$ tel que $\int \left|\nabla\hat{f}\right|^2 d\xi \leq C\|f\|_D^2$.*

Ce lemme est issu de [1], démonstration du thm. 3.4; voir aussi [12], p. 236. La preuve en est facile.

Soit maintenant une fonction $\psi \in C_0^\infty(M)$. Nous noterons $\tilde{\psi}$ la fonction sur X définie par

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} \psi\, d\xi.$$

Soit S l'opérateur de $C_0^\infty(M)$ dans lui-même défini par: $S\psi = \sum_{x\in X}\tilde{\psi}(x)\phi_x$. Des vérifications de routine, utilisant le fait 1, permettent de montrer le:

LEMME 2: *(a) S est un opérateur régularisant, c'est-à-dire qu'il envoie L^p dans L^p, $1 \leq p \leq +\infty$, et L^1 dans L^∞.*

(b) $\exists C > 0$ tel que $\|S\psi\|_p \leq C\left\|\tilde{\psi}\right\|_p$, $\forall\psi \in C_0^\infty(M)$ et $\|f\|_p \leq C\left\|S\hat{f}\right\|_p$, $\forall f \in C_0(X)$.

Dans [12], Kanai montre (lemme 8) l'inégalité de Poincaré suivante:

$$\int_{B(x,\varepsilon)} \left|\psi - \tilde{\psi}(x)\right| d\xi \leq C \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla\psi|\ d\xi.$$

On en déduit le:

Lemme 3: $\exists C > 0$ *tel que* $\left\|\tilde{\psi}\right\|_D^2 \leq C \int |\nabla\psi|^2\, d\xi$ *et* $\|\psi - S\psi\|_2 \leq C \int |\nabla\psi|^2\, d\xi$, $\forall \psi \in C_0^\infty(M)$.

La première assertion est démontrée dans [12], p. 236; quant à la seconde, elle découle facilement de l'inégalité $\int_{B(x,\varepsilon)} \left|\psi - \tilde{\psi}(x)\right|^2 d\xi \leq C \int_{B(x,\varepsilon)} |\nabla\psi|^2\, d\xi$, que l'on déduit classiquement de l'inégalité de Poincaré ci-dessus (cf. [20], cor. 1, p. 500).

IV. Le résultat principal

Dans ce paragraphe, nous continuons à utiliser les notations de III.

Théorème 3: *Soit M une variété riemannienne complète, à géométrie bornée, et X un discrétisé de M.*

Alors M a pour dimension à l'infini $n > 0$ si et seulement si X est de dimension n. Autrement dit, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-n/2}), t \to +\infty$.

(ii) La chaîne de Markov standard sur X, de noyau q, vérifie $\sup_{x,y\in X} q_k(x,y) = O(k^{-n/2})$.

Preuve: (i)$\Rightarrow$ (ii). D'après le théorème 2 (qui s'applique grâce au fait 1), (i) se traduit par:

$$\Delta^{-1/2} : L^2 \to L^2 + L^{\frac{2n}{n-2}}.$$

D'après le lemme 2, S est régularisant, et donc:

$$S\Delta^{-1/2} : L^2 \to L^{\frac{2n}{n-2}}.$$

En particulier, $\forall f \in C_0(X)$,

$$\left\|S\hat{f}\right\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 \leq C \left\|\Delta^{1/2}\hat{f}\right\|_2^2 = C \int \left|\nabla\hat{f}\right|^2 d\xi.$$

Finalement, comme d'après le lemme 2,

$$\|f\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C \left\|S\hat{f}\right\|_{\frac{2n}{n-2}},$$

et d'après le lemme 1, $\int \left|\nabla \hat{f}\right|^2 d\xi \leq C \|f\|_D^2$, on a bien

$$\|f\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C \|f\|_D ,$$

donc d'après le théorème 1, la condition (ii) est vérifiée. ∎

(ii) $\Rightarrow$ (i). D'après (ii) et le lemme 3,

$$\forall \psi \in C_0^\infty(M), \left\|\tilde{\psi}\right\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq C \left\|\tilde{\psi}\right\|^2_D \leq C \int |\nabla \psi|^2 \, d\xi.$$

D'après le lemme 2,

$$\|S\psi\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C \left\|\tilde{\psi}\right\|_{\frac{2n}{n-2}} ,$$

et d'après le lemme 3,

$$\|S\psi - \psi\|_2^2 \leq C \int |\nabla \psi|^2 \, d\xi.$$

Finalement,

$$\|S\psi\|^2_{\frac{2n}{n-2}} + \|\psi - S\psi\|_2^2 \leq C \int |\nabla \psi|^2 \, d\xi, \forall \psi \in C_0^\infty(M),$$

autrement dit

$$\Delta^{-1/2} : L^2 \to L^2 + L^{\frac{2n}{n-2}}.$$

Le théorème 2 permet de conclure. ∎

Remarques: Le lecteur aura noté que les théorèmes 1 et 2 semblent imposer la condition $n > 2$; mais il saura aussi se convaincre que cette restriction n'est pas sérieuse.

– Pour traduire (ii), on aurait sans doute pu utiliser les méthodes de [3], c'est-à-dire les inégalités de type Nash, au lieu de celles du §I.

– L'énoncé ci-dessus permet de faire le lien entre le thm. 3 de [5] et le thm. 5.14 de [3], selon lesquels, respectivement, le noyau de la chaleur d'une variété non-compacte est toujours au plus en $t^{-1/2}$, pour t grand, et la marche standard sur un graphe infini est toujours au plus en $k^{-1/2}$.

– Il est possible de se passer dans la théorie précédente de l'hypothèse sur le rayon d'injectivité, à condition de pondérer tous les objets par $V_x(1)$. Ceci fera l'objet d'une publication ultérieure.

– Comme me l'a fait remarquer Brian Davies, la géométrie différentielle ne sert ici qu'à assurer le fait 1, et l'inégalité de Poincaré. Une fois ces ingrédients obtenus, le reste de la démarche est entièrement analytique.

V. Applications

1. Revêtements co-compacts.

Proposition 1 ([18], (voir aussi [1])): *Soit M_1 une variété riemannienne compacte, et M un revêtement galoisien de M_1. Soit p_t le noyau de la chaleur sur M, et G le groupe du revêtement.*

Alors $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-n/2}), t \to +\infty \Leftrightarrow \forall\mu$, probabilité symétrique à support compact et générateur sur G, $\mu^k(\{e\}) = O(k^{-n/2})$.

Le théorème 3 s'applique. En effet, une telle variété M est clairement à géométrie bornée. De plus, pour $x_0 \in M_1$, et π la projection canonique de M sur M_1, il est facile de voir que $X = \pi^{-1}(x_0)$ est un discrétisé de M, qui est en bijection avec G. La distance des mots sur G est équivalente à la distance du graphe sur X (lemme de Milnor [14]), et la forme de Dirichlet associée à μ est équivalente à la norme de Dirichlet de X.

Remarques:

– Une manière équivalente de formuler l'hypothèse sur M est de dire que M est une variété sur laquelle opère librement et proprement un groupe d'isométries G, tel que $M/G = M_1$ soit compacte.

– Varopoulos a montré (voir par exemple [19], thm.2) que la croissance du volume d'un groupe gouverne la décroissance des puissances de convolution de probabilités sur ce groupe. Il résulte donc de la proposition ci-dessus que c'est la croissance du volume de G, si elle est polynômiale, qui gouverne la décroissance du p_t sur M pour grand t .

– Brooks ([2]) avait démontré, dans la même situation, que M est coercive si et seulement si G est non-moyennable.

2. Inégalités de Sobolev modifiées. Il est bien connu que, sur une variété riemannienne M, si

$$\inf_{\Omega} \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} > 0,$$

où l'infimum est pris sur tous les ouverts réguliers de M, alors $\sup_{x,y\in M} p_t(x,y) \leq Ct^{-n/2}$.

Suivant Chavel et Feldman, nous dirons que la variété M vérifie une inégalité de Sobolev modifiée de dimension n si

$$\inf_{\Omega} \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} > 0,$$

où l'infimum est pris seulement sur les ouverts Ω de M contenant un disque géodésique de rayon $\rho > 0$ fixé.

PROPOSITION 2 ([5]): *Soit M une variété riemannienne complète à géométrie bornée, vérifiant une inégalité de Sobolev modifiée de dimension n. Alors*

$$sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-n/2}), \quad t \to +\infty.$$

Preuve: Voici l'itinéraire proposé dans [4]: l'inégalité de Sobolev modifiée sur M suffit à entraîner une inégalité de Sobolev de même dimension sur un discrétisé X (voir [11]); celle-ci entraîne (cf. thm. 1 ci-dessus) la décroissance de la marche aléatoire standard sur X en $k^{-n/2}$. Le théorème 3 permet de conclure. ∎

3. VARIÉTÉS ISOMÉTRIQUES À L'INFINI. Deux espaces métriques E et $\tilde{E}$, de distances d et $\tilde{d}$, sont dits isométriques à l'infini s'il existe $\phi : E \longrightarrow \tilde{E}$ telle que: $\exists\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in \tilde{E}, \tilde{d}(x, \phi(E)) < \varepsilon$, et $\exists a > 1$ et $b > 0$ tels que

$$a^{-1}d(x,y) - b \leq \tilde{d}(\phi(x), \phi(y)) \leq ad(x,y) + b, \quad \forall x, y \in E.$$

Une telle application n'est pas nécessairement continue. Cette notion a été introduite par Kanai ([11]).

Soient maintenant M et $\tilde{M}$ deux variétés riemanniennes complètes à géométrie bornée. Nous noterons respectivement p_t et $\tilde{p}_t$ les noyaux de la chaleur sur M et sur $\tilde{M}$.

PROPOSITION 3: *Si M et $\tilde{M}$ sont isométriques à l'infini, alors*

$$sup_{x,y\in M} p_t(x,y) = O(t^{-n/2}), \quad t \to +\infty$$

si et seulement si $sup_{x,y\in M} \tilde{p}_t(x,y) = O(t^{-n/2}), t \to +\infty.$

Preuve: Si X et $\tilde{X}$ sont des discrétisés de M et $\tilde{M}$ respectivement, ils sont aussi isométriques à l'infini ([11], lemme 2.5). Il n'est pas difficile d'en déduire que les normes de Dirichlet qui leur sont associées sont alors équivalentes (cf. [12] p. 234). Le théorème 3 permet à nouveau de conclure. ∎

Remarque: Cet énoncé généralise le thm. 5 de [6], où l'on aurait d'ailleurs dû préciser qu'il fallait considérer des variétés à géométrie bornée au sens ci-dessus; voir aussi le thm. 1 de [12]. ∎

Références

[1] A. Ancona, *Théorie du potentiel sur des graphes et des variétés,* Cours de l'Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour, 1988, Springer Lecture Notes **1427** (1990), 4–112.

[2] R. Brooks, *The fundamental group and the spectrum of the Laplacian,* Comm. Math. Helv. **56** (1981), 581–598.

[3] E. Carlen, S. Kusuoka and D. Stroock, *Upper bounds for symmetric Markov transition functions,* Ann. Inst. H. Poincaré, proba. et stat. **suppl. au 2** (1987), 245–287.

[4] I. Chavel and E. Feldman, *Isoperimetric constants, the geometry of ends, and large time heat diffusion in riemannian manifolds,* Proc. Lond. Math. Soc., 3, **62** (1991), 427–448.

[5] I. Chavel and E. Feldman, *Modified isoperimetric constants and large time heat diffusion in riemannian manifolds,* Duke Math. J. **64** (1991), 473–499.

[6] T. Coulhon, *Dimension à l'infini d'un semi-groupe analytique,* Bull. Sci. Math., 2^{e} série **114** (1990), 485–500.

[7] T. Coulhon, *Dimensions of continuous and discrete semigroups,* in *Semigroup Theory and Evolution Equations* (Clément, Mitidieri, De Pagter, eds.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Vol. 135, M. Dekker, New York, 1991, pp. 93–99.

[8] T. Coulhon and L. Saloff-Coste, *Puissances d'un opérateur régularisant,* Ann. Inst. H. Poincaré, proba. et stat. **26** (1990), 419–436.

[9] T. Coulhon and L. Saloff-Coste, *Marches aléatoires non symétriques sur les groupes unimodulaires,* C. R. Acad. Sci. Paris, série I **310** (1990), 627–630.

[10] C. Croke, *Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **13** (1980), 419–435.

[11] M. Kanai, *Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of non-compact riemannian manifolds,* J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 391–413.

[12] M. Kanai, *Rough isometries and the parabolicity of riemannian manifolds,* J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 227–238.

[13] M. Kanai, *Analytic inequalities, and rough isometries between non-compact riemannian manifolds,* in *Curvature and Topology of Riemannian Manifolds,* Springer Lecture Notes No. 1201, 1986, pp. 122–137.

[14] J. Milnor, *A note on curvature and fundamental group,* J. Diff. Geom. **2** (1968), 1–7.

[15] N. Varopoulos, *Brownian motion and random walks on manifolds,* Ann. Inst. Fourier **34** (1984), 243–269.

[16] N. Varopoulos, *Isoperimetric inequalities and Markov chains,* J. Funct. Anal. **63** (1985), 215–239.

[17] N. Varopoulos, *Hardy–Littlewood theory for semigroups,* J. Funct. Anal. **63** (1985), 240–260.

[18] N. Varopoulos, *Random walks and Brownian motion on manifolds,* Symposia Math. **29** (1987), 97–109.

[19] N. Varopoulos, *Convolution powers on locally compact groups,* Bull. Sci. Math., 2^{e} série **111** (1987), 333–342.

[20] S. Yau, *Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact riemannian manifold,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **8** (1975), 487–507.